q進体の巡回p拡大の分岐定数について ($\mathbb{Z}_p$拡大およびその関連理論の研究)

末吉, 豊

数理解析研究所講究録
440巻 1981年 17-25

$\mathfrak{p}$進体の巡回p拡大の分岐定数について

九大理　　末吉　豊

$\mathbb{Q}_p$を有理p進数体、$k/\mathbb{Q}_p$を有限次拡大とし、ord_kでkの正規付値を表わす。K/kを有限次ガロア拡大、Gをそのガロア群とし、$G_i=\{\sigma\in G \mid ord_K(a^\sigma-a)\geqq i+1 \text{ for } \forall a\in \mathcal{O}_K\}$ $(i\geqq -1)$を第i次分岐群とする。ここで、$\mathcal{O}_K$はKの整数環を表わす。$G_i\neq G_{i+1}$なる整数iは lower ramification number と呼ばれる。$x\in\mathbb{R}$, $x\geqq -1$に対して、$i-1<x\leqq i$のとき、$G_x=G_i$と定義し、$\varphi_{K/k}(x)=\int_0^x (G_0:G_t)^{-1}dt$とおく。$G^{\varphi_{K/k}(x)}=G_x$とおいて、$G^t\neq G^{t+\varepsilon}$ for $\forall\varepsilon>0$なるtを upper ramification number と呼ぶ。ここでは、upper ramification number のことを単に分岐定数ということにする。

K/kが abel 拡大なら、Hasse-Arf の定理により、K/kの分岐定数はすべて整数、特にK/kが完全分岐なp^m次巡回拡大なら、その分岐定数$t_1<\cdots<t_m$がすべて自然数である。そこで、kおよびm個の自然数$t_1<\cdots<t_m$が与えられたとき、$t_1,\cdots,t_m$がある完全分岐なp^m次巡回拡大K/kの分岐定数となるための必要十分条件を求める問題が考えられる。この問題に対して、

次のようにMaus（kが1の原始p乗根ζ_1を含まない場合、及び、kが1の原始p^s乗根ζ_sを含み、$\mathrm{ord}_k(\zeta_s-1)\not\equiv 0 \pmod{p}$ が成り立つ場合）[1]、Miki（一般の場合）[2]、[3] により解答が与えられた。

$e=\mathrm{ord}_k(p)$, $\#\bar{k}=p^f$（但し、$\bar{k}$はkの剰余体）、$e'=e/(p-1)$ とおき、$U=U^0=k$の単数群、$U^i=\{u\in U \mid \mathrm{ord}_k(u-1)\geqq i\}$、$P(t)=\min(pt,t+e)$ for $t\geqq 0$、$f_k=\{t\in\mathbb{Z}\mid 0<t<pe',\ t\not\equiv 0 \pmod{p}\}$ とする。$\zeta_1\in k$ のとき、$\zeta_s\in k$, $\zeta_{s+1}\notin k$ で s を定め、$p^\ell \,\|\, \mathrm{ord}_k(\zeta_s-1)$ とすると、[3]のLemma 17 により、

$$\zeta_s=\xi_0^{p^\ell}\xi_1^{p^{\ell-1}}\cdots\xi_\ell\ ,\quad \xi_\ell\neq 1,\quad \xi_i\in U^1$$

なる分解で条件

a) $\mathrm{ord}_k(\xi_\ell-1)\in f_k\cup\{pe'\}$.

b) $\xi_i\neq 1$ なる i $(0\leqq i\leqq \ell-1)$ に対して、$\mathrm{ord}_k(\xi_i-1)\in f_k$.

c) $\xi_i\neq 1, \xi_j\neq 1$ なる i, j $(0\leqq j<i\leqq \ell)$ に対して

$$\mathrm{ord}_k(\xi_i-1)>p^{i-j}\,\mathrm{ord}_k(\xi_j-1).$$

をみたすものがある。しかも、$\lambda_i=\mathrm{ord}_k(\xi_i-1)$ とおくとき、集合 $\{\lambda_i \mid \lambda_i\neq\infty\}$ はkのみで定まって、上の分解及びζ_sの選び方によらない。以上の準備の下で、Maus, Mikiの結果は次のように述べられる。

定理（Maus-Miki）　$k/\mathbb{Q}_p$を有限次拡大、$t_1<\cdots<t_m$ を m 個の自然数とする。$t_1,\cdots,t_m$ がある完全分岐な p^m 次巡回拡大 K/k

の分岐定数となるための必要十分条件は、$t_1, \cdots, t_m$ が次の条件 i)、ii)、iii) をみたすことである。

i) $t_{i+1} \geqq P(t_i)$ for $i = 1, \cdots, n-1$、

ii) $t_i = P(t)$ for some $t \in N$ ならば、

$$\begin{cases} \varsigma_1 \notin k \text{ のとき、} i \geqq 2 \text{ かつ } t = t_{i-1}, \\ \varsigma_1 \in k,\ t \neq e' \text{ のとき、} i \geqq 2 \text{ かつ } t = t_{i-1}, \end{cases}$$

iii) $t_i = 0$ for $i \leqq 0$ とおく。

iii-1) $f = 1$ のとき、

ある j ($1 \leqq j \leqq m$) に対して、次の条件

$$C(j): \begin{cases} t_{j-i} \leqq \lambda_{\ell-i} \quad (0 \leqq \forall i \leqq \ell) \\ I = \{ i \mid 0 \leqq i \leqq \ell,\ t_{j-i} = \lambda_{\ell-i} \} \text{ とおくと、} \\ \qquad \# I = \begin{cases} \text{odd} & (p = 2) \\ 1 & (p \neq 2) \end{cases} \end{cases}$$

が成立すれば、$m \leqq j + s - 1$、

iii-2) $f > 1$ のとき、

ある j ($1 \leqq j \leqq m$) に対して

$$\begin{cases} t_j \neq P(t_{j-1}) \\ t_j = \lambda_\ell = pe' \\ t_{j-i} < \lambda_{\ell-i} \quad (1 \leqq \forall i \leqq \ell) \end{cases}$$

が成立すれば、$m \leqq j + s - 1$。

<u>Remark</u>：条件 i)、ii) は次のようにもかける。

1) $t_1 \in f_k$ $(\varsigma_1 \notin k)$, $t_1 \in f_k \cup \{pe'\}$ $(\varsigma_1 \in k)$.

2) $t_i < e'$ なら、$t_{i+1} = pt_i$

又は、$t_{i+1} > pt_i$ かつ $\begin{cases} t_{i+1} \in f_k & (\varsigma_1 \notin k) \\ t_{i+1} \in f_k \cup \{pe'\} & (\varsigma_1 \in k). \end{cases}$

3) $t_i \geqq e'$ なら、$t_{i+1} = t_i + e$。

ここでは、局所類体論によってKに対応するnormの群 $N_{K/k}K^\times = M$ を具体的に1つ与えることによって上記定理の(K/kの)存在証明の別証明を与える。これは、$\varsigma_1 \notin k$ の場合、及び $\varsigma_s \in k$ かつ $ord_k(\varsigma_s - 1) \not\equiv 0 \pmod p$ の場合にMausが与えた証明の一般化である。

Mを$k^\times$の部分群、KをMに対応するk上の類体とする。このとき、K/kが完全分岐なp^m次巡回拡大で$t_1, \cdots, t_m$を分岐定数にもつための必要十分条件は

d) $k^\times/M$ は位数 p^m の巡回群である。

$M_i = Mk^{\times p^i}$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ とおく。

e) $M_i \not\supset U^{t_i}$, $M_i \supset U^{t_i+1}$ $(i = 1, \cdots, m)$。

をみたすことである。従って定理の条件 i), ii), iii) をみたす $t_1, \cdots, t_m$ に対して、d), e) をみたすMを構成すればよい。なお、条件 i), ii), iii) が必要であることは、d), e) および準同型 $\mathbb{P}_t : U^t/U^{t+1} \longrightarrow U^{p(t)}/U^{p(t)+1}$、$\mathbb{P}_t(uU^{t+1}) = u^p U^{p(t)+1}$ の性質を用いて証明できる。

$$F = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x \in f_k,\ y = 1, \cdots, f\} & (\zeta_1 \notin k) \\ \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x \in f_k,\ y = 1, \cdots, f\} \cup \{(pe', 1)\} & (\zeta_1 \in k) \end{cases}$$

とおく。$\mathbb{Z}_p$-module U' の生成元 $\{\eta_{xy}\}_{(x,y)\in F}$ を

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_k(\eta_{xy} - 1) = x & \text{for } \forall (x,y) \in F、 \\ \eta_{\lambda_i, 1} = \zeta_i & \text{for } \lambda_i \neq \infty \quad \text{if } \zeta_1 \in k、 \end{cases}$$

をみたすようにとれば、

$$U' = \begin{cases} \prod_{(x,y)\in F} \eta_{xy}^{\mathbb{Z}_p} & (\text{直積}) \quad (\zeta_1 \notin k) \\ \prod_{(x,y)\in F - \{(\lambda_\ell, 1)\}} \eta_{xy}^{\mathbb{Z}_p} \times \langle \zeta_s \rangle & (\text{直積}) \quad (\zeta_1 \in k) \end{cases}$$

である。

$$F_0 = \begin{cases} f_k & \zeta_1 \notin k \\ f_k \cup \{pe'\} & \zeta_1 \in k \end{cases}$$

$$F_1 = \{t_{i_1}, \cdots, t_{i_r}\} = \{t_i \mid p(t_{i-1}) \neq t_i\}, \quad i_1 < \cdots < i_r$$

$$F_2 = \{\lambda_i \mid 0 \leqq i \leqq \ell,\ \lambda_i \neq \infty\}$$

とおく。π を k の1つの素元とする。

(I) $f = 1$ のとき

(A) $\zeta_1 \notin k$ 又は $\zeta_1 \in k$ かつ $F_1 \cap F_2 = \phi$ のとき

<u>定理1</u>　今述べた条件の下で、

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z}, 1}\ (z = 1, \cdots, r), \quad \beta_z = \alpha_1^{-p^{i_z - 1}} \alpha_z \quad (z = 2, \cdots, r)$$

$$M = \langle k^{\times p^m},\ \pi,\ \eta_{x1}\ (x \in F_0 - F_1),\ \beta_z\ (z = 2, \cdots, r) \rangle$$

とおけば、M は条件 d), e) をみたす。

(B) $\zeta_1 \in \mathfrak{k}$ かつ $F_1 \cap F_2 \neq \phi$ のとき

$E = \{z \mid t_{i_z} \in F_1 \cap F_2\}$ とおく。$t_{i_z} = \lambda_i$ のとき、$i = i(z)$ とかく

$\min\{i_z - i(z) \mid z \in E\}$ を与える z を $z_1 < \cdots < z_v$ ($v \geqq 1$) とする。

<u>補題1</u>　$\{t_1, \cdots, t_m\} \cap F_2 = F_1 \cap F_2$。

<u>補題2</u>　条件

$$C'(j'): \begin{cases} t_{j'-i} \leqq \lambda_{\ell-i} & \text{for } 0 \leqq {}^{\forall} i \leqq \ell \ \text{s.t.}\ j'-i \in \{i_z \mid z \in E\}, \\ \text{等号が少くとも1ヵ所で成立する。} \end{cases}$$

をみたすような $j' \leqq i_r$ がただ1つ存在する。しかも上の等号の個数は v に等しく、$j' = \ell - i(Z) + i_Z$、但し、Z は $z_1, \cdots, z_v$ のいずれでもよい、で与えられる。

<u>系1</u>　もし条件 $C(j)$ をみたす j が存在するなら $j = j'$ で $v = \mathrm{odd}$ $(p=2)$ 又は 1 $(p \neq 2)$。

<u>系2</u>　補題2の j' に対して $C(j')$ が成り立たないならば、

$$0 \leqq {}^{\exists} h \leqq \ell \quad \text{s.t.} \begin{cases} j'-h \notin \{i_z \mid z \in E\}, \ \ell - h \notin \{i(z) \mid z \in E\} \\ t_{j'-h} > \lambda_{\ell-h} \end{cases}$$

<u>定理2</u>　条件(B)の下で

(B−1)　$v = \mathrm{even} \geqq 2$ $(p=2)$、$v \geqq 2$ $(p \neq 2)$ のとき、

$a_z \in \mathbb{Z}$ $(z = 1, \cdots, r)$ を

$$\begin{cases} a_z \not\equiv 0 \pmod{p},\ a_1 = 1,\ a_z = 1 \quad \text{for} \quad z \notin E, \\ \displaystyle\sum_{z \in E} a_z\, p^{i_z - 1 + \ell - i(z)} = 0 \end{cases}$$

をみたすようにとり、

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z},1} \quad (z=1,\cdots,r), \quad \beta_z = \alpha_1^{-a_z \cdot p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2,\cdots,r)$$

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{x1} \ (x \in F_0 - F_1), \ \beta_z \ (z=2,\cdots,r) \rangle$$

とおけば、Mは条件 d), e) をみたす。

(B-2) $v = odd$ $(p=2)$, $v=1$ $(p \neq 2)$ で条件 $C(\ell - i(Z) + i_Z)$ が成り立っているとき、

仮定より、$\ell - i(Z) + i_Z + s - 1 \geqq m$ である。このとき、M を定理 1 と同様に定義すれば、M は条件 d), e)をみたす。

(B-3) $v = odd$ $(p=2)$, $v=1$ $(p \neq 2)$ で条件 $C(\ell - i(Z) + i_Z)$ が成り立たないとき、

α_z, β_zを定理 1 と同様に定義し、系 2 の h を用いて、

$$\eta = \eta_{\lambda_{\ell-h},1} \, \alpha_1^{\sum_{z \in E} p^{i_z - 1 + \ell - i(z) - h}}$$

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{x1} \ (x \in F_0 - F_1 - \{\lambda_{\ell-h}\}), \ \eta, \ \beta_z \ (z=2,\cdots,r) \rangle$$

とおけば、Mは条件 d), e) をみたす。

(II) $f > 1$ のとき

<u>定理 3</u> (A′) $\lambda_\ell \neq pe'$ 又は $t_{i_r} \neq pe'$ のとき、

$$F_3 = \begin{cases} \{(t_{i_z}, f) \mid z=1,\cdots,r\} & (t_{i_r} \neq pe') \\ \{(t_{i_z}, f) \mid z=1,\cdots,r-1\} \cup \{(pe',1)\} & (t_{i_r} = pe') \end{cases}$$

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z},f} \quad (z=1,\cdots,r-1), \quad \alpha_r = \begin{cases} \eta_{t_{i_r},f} & (t_{i_r} \neq pe') \\ \eta_{pe',1} & (t_{i_r} = pe') \end{cases}$$

$$\beta_z = \alpha_1^{-p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2,\cdots,r)$$

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{xy}\ ((x,y) \in F - F_3),\ \beta_z\ (z=2,\cdots,r)\rangle$$

とおけば、Mは条件 d), e) をみたす。

(B') $t_{i_r} = pe' = \lambda_\ell$ のとき

$F_4 = \{(t_{i_z}, 1) \mid z = 1, \cdots, r\}$ とおく。

(B'-1) $1 \leqq \forall i \leqq \ell$ に対し、$t_{i_r - i} \leqq \lambda_{\ell - i}$ で等号の成り立つ i が少くとも1つあるとき

Eを $f = 1$ のときと同様に定義し、a_z, α_z, β_z を定理2 (B-1) のときと同様にとり、

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{xy}\ ((x,y) \in F - F_4),\ \beta_z\ (z=2,\cdots,r)\rangle$$

とおけば、Mは条件 d), e) をみたす。

(B'-2) $1 \leqq \forall i \leqq \ell$ に対し、$t_{i_r - i} < \lambda_{\ell - i}$ が成り立つとき

仮定より $i_r + s - 1 \geqq m$ が成り立つ。α_z, β_z を定理2 (B-2) のようにとり、

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{xy}\ ((x,y) \in F - F_4),\ \beta_z\ (z=2,\cdots,r)\rangle$$

とおけば、Mは条件 d), e) をみたす。

(B'-3) $1 \leqq h \leqq \ell$ で $t_{i_r - h} > \lambda_{\ell - h}$ なる h が存在するとき

α_z, β_z, η を定理2 (B-3) のようにとり、

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{xy}\ ((x,y) \in F - F_4 - \{(\lambda_{\ell - h}, 1)\}),\ \eta,\ \beta_z (z=2,\cdots,r)\rangle$$

とおけば、Mは条件 d), e) をみたす。

参考文献

[1] E. Maus, Existenz $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper zu vorgegebenem Verzweigungsverhalten, Dissertation, Hamburg, 1965

[2] H. Miki, 局所体の分岐定数について、第25回代数学シンポジウム, 1979. 8. 27−30, 北大.

[3] H. Miki, On the ramification numbers of cyclic p-extensions over local fields, J. Reine Angew. Math., to appear.